

Notes de cours - Préparation à l'agrégation  
Équations différentielles : analyse qualitative et  
approximation numérique

Université Rennes 1, ENS Rennes

Rozenn Texier-Picard\*

## Table des matières

<b>1 Motivations</b>	<b>3</b>
1.1 Un peu d'histoire . . . . .	3
1.2 Exemples . . . . .	3
<b>2 Autour de l'existence et de l'unicité</b>	<b>3</b>
2.1 Deux exemples instructifs . . . . .	3
2.2 Le théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	4
2.3 Du local au global . . . . .	5
2.3.1 Existence d'un intervalle maximal . . . . .	5
2.3.2 Existence globale ou sortie de tout compact . . . . .	5
2.3.3 Cas globalement lipschitzien . . . . .	7
2.4 Positivité des solutions . . . . .	7
2.5 Méthode des rectangles invariants . . . . .	8
<b>3 Portrait de phase et comportement qualitatif</b>	<b>9</b>
3.1 Points réguliers et redressement du flot . . . . .	9
3.2 Points singuliers, exemples . . . . .	10
<b>4 Stabilité des points d'équilibre</b>	<b>11</b>
4.1 Définitions . . . . .	11
4.2 Stabilité des points singuliers dans le cas linéaire . . . . .	12
4.2.1 Cas d'une valeur propre unique . . . . .	12
4.2.2 Cas général . . . . .	13
4.2.3 Classification des points singuliers dans le cas linéaire . . . . .	15
4.3 Cas non linéaire . . . . .	15
4.3.1 Théorème de linéarisation . . . . .	15
4.3.2 Cas du pendule oscillant . . . . .	18
4.3.3 Complément : théorème de Hartman-Grobman . . . . .	18

---

\*ENS Rennes, av. Robert Schuman, F-35170 Bruz, France ; rozenn.texier@ens-rennes.fr

<b>5</b>	<b>Fonctions de Lyapunov et applications</b>	<b>18</b>
5.1	Définitions et résultats de stabilité . . . . .	18
5.2	Application au pendule sans frottement . . . . .	20
<b>6</b>	<b>Etude de cas : populations en interaction</b>	<b>22</b>
6.1	Positivité et bornes a priori . . . . .	22
6.2	États d'équilibre . . . . .	23
<b>7</b>	<b>Approximation numérique</b>	<b>24</b>
7.1	Quelques méthodes classiques . . . . .	24
7.2	Convergence de la méthode d'Euler explicite . . . . .	24
7.3	En pratique : limitations des méthodes explicites . . . . .	28
7.3.1	Problèmes raides . . . . .	28
7.3.2	Systèmes hamiltoniens . . . . .	30

# 1 Motivations

## 1.1 Un peu d'histoire

- Histoire : EDO depuis le 17ème siècle (Newton, Leibniz...)
- Au départ : recherche de solutions exactes à partir de fonctions usuelles, séries
- Ex du pb à  $n$  corps :

$$m_i x_i''(t) = G \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{x_j - x_i}{\|x_j - x_i\|^3}, 1 \leq i \leq n,$$

résolu par Newton pour  $n = 2$ , on retrouve les lois de Kepler.

- En 1889, le roi Oscar de Suède offre 2500 couronnes à qui résoudra le pb à 3 corps. Henri Poincaré gagne le prix en montrant qu'on ne peut pas trouver de solution explicite en général. Son manuscrit comportait une erreur, qui l'obligea à rembourser 3500 couronnes de frais d'impression, et à le republier après d'importantes corrections... Mais l'erreur fut féconde et donna lieu à d'importants développements sur l'analyse qualitative des EDO.
- Alternatives aux solutions explicites : approximation ou analyse qualitative
- les deux sont complémentaires (temps court / temps long).

## 1.2 Exemples

- pb à  $n$  corps : stabilité? orbites périodiques?
- Autre ex : biologie des populations, système de 2 espèces en compétition. Motivations : états d'équilibres? Comportement en temps long? Coexistence ou non? Dépendance par rapport aux cond initiales...

# 2 Autour de l'existence et de l'unicité

## 2.1 Deux exemples instructifs

(voir [3])

### Exemple 2.1 Désintégration radioactive

$$y'(t) = -Cy(t), y(0) = y_0$$

avec  $C > 0, y_0 > 0$  donnés. Solution explicite :  $y(t) = y_0 e^{-Ct}$ .

En temps infini, la solution tend vers la solution stationnaire nulle.

### Exemple 2.2 Baignoire qui se vide

Loi de Torricelli :

$$h'(t) = -C\sqrt{h(t)}, h(0) = h_0$$

avec  $C > 0, h_0 > 0$  donnés. Solution explicite :

$$h(t) = \begin{cases} (\sqrt{h_0} - \frac{C}{2}t)^2, & t \leq \frac{2\sqrt{h_0}}{C} = t_1, \\ 0, & t \geq t_1. \end{cases}$$

En temps fini, la solution atteint la solution stationnaire nulle.

Dans les deux cas, on a existence et unicité de la solution pour la donnée initiale indiquée. Mais dans le cas de la baignoire, une fois que la baignoire est vide, on ne peut pas "remonter" le temps et savoir le passé : pas d'unicité locale de la solution au voisinage de  $h_0 = 0$ .

Rem :  $\sqrt{\cdot}$  n'est pas localement lipschitz au voisinage de 0.

## 2.2 Le théorème de Cauchy-Lipschitz

$U$  ouvert de  $\mathbb{R}^{N+1}$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$  champ de vecteurs,  $f$  continue par rapport à  $(t, x)$ . On fixe  $(t_0, x_0) \in U$ . Problème de Cauchy :

$$x'(t) = f(t, x(t)), x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

Dans le cas particulier où  $f$  ne dépend pas de  $t$  (cas autonome), le problème de Cauchy se réécrit :

$$x'(t) = f(x(t)), x(t_0) = x_0. \quad (2)$$

### Théorème 2.3. Cauchy-Lipschitz

On suppose  $f$  localement lipschitzienne par rapport à  $x$ . Alors pour tout  $(t_0, x_0) \in U$ , le problème (1) a une unique solution locale, i.e.

i il existe  $I$  voisinage ouvert de  $t_0$ , et  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ , de classe  $C^1$ , tels que

$$\forall t \in I, \gamma'(t) = f(t, \gamma(t)), \gamma(t_0) = x_0.$$

ii si  $(I_1, \gamma_1)$  et  $(I_2, \gamma_2)$  sont deux solutions locales, alors  $\gamma_1 = \gamma_2$  sur  $I_1 \cap I_2$ .

### Remarque 2.4

- Pour une équation dérivant d'un modèle physique, biologique, etc., l'existence et l'unicité locale sont le signe du caractère déterministe du modèle.
- Sens précis de l'hypothèse :

$$\forall (t_0, x_0) \in U, \exists V \text{ voisinage de } t_0, \exists W \text{ voisinage de } x_0, \exists K > 0,$$

$$\forall (x, y, t) \in W^2 \times V, |f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|.$$

- Si  $f$  est autonome (pas de dépendance en  $t$ ) on peut alléger l'hypothèse (ne pas s'en priver!).
- Le théorème se généralise à la dimension infinie (Banach).
- Si on n'a pas la condition de Lipschitz locale, mais seulement la continuité, alors le théorème de Cauchy-Peano donne l'existence locale d'une solution, en revanche on n'a pas l'unicité (cf Ex 2.2).
- Le théorème de Cauchy-Peano ne fonctionne pas en dimension infinie.

### Pourquoi la condition de Lipschitz locale donne l'unicité ?

- Preuve par point fixe de Banach : on se ramène à un problème de point fixe équivalent de la forme

$$y = F(y), \quad F(u)(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds,$$

où  $F$  est définie sur  $C^0([t_0 - \eta, t_0 + \eta], B(u_0, r))$  avec  $\eta$  et  $r$  à préciser. La condition de Lipschitz locale permet d'avoir une application  $F$  contractante en choisissant un cylindre de contrôle assez petit...

- De façon plus explicite... On suppose  $f$   $K$ -lipschizienne sur  $I \times B(u_0, r)$ , avec  $I = [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ . On considère deux problèmes de Cauchy

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= f(t, u_1(t)), & u_1(t_0) &= x_1. \\ u_2'(t) &= f(t, u_2(t)), & u_2(t_0) &= x_2. \end{aligned}$$

On a alors

$$\forall t \in I, |u_1 - u_2|'(t) \leq |u_1' - u_2'| \leq K|u_1 - u_2|(t).$$

On en déduit l'estimation suivante :

$$\forall t \in I, |u_1(t) - u_2(t)| \leq |x_1 - x_2| e^{K|t-t_0|}. \quad (3)$$

Ainsi,  $K$  contrôle la vitesse à laquelle deux trajectoires s'écartent l'une de l'autre. En particulier si  $x_1 = x_2$ , on obtient l'unicité locale.

Preuve de l'estimation : elle repose sur le lemme de Gronwall

#### Lemme 2.5. Gronwall

Soit  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ , continue, vérifiant

$$\forall t \in I, g(t) \leq C + K \int_{t_0}^t g(s) ds.$$

avec  $C, K > 0$ . Alors on a

$$\forall t \in I, g(t) \leq C e^{K(t-t_0)}.$$

On applique le lemme dans un premier temps à  $g = |u_1 - u_2|$  pour  $t \geq t_0$ , puis à  $g = |u_1(2t_0 - \cdot) - u_2(2t_0 - \cdot)|$  pour  $t < t_0$ .

## 2.3 Du local au global

### 2.3.1 Existence d'un intervalle maximal

Soit  $(I, \gamma)$  une solution. Si  $I$  n'est pas ouvert, alors on peut prolonger la solution sur un intervalle plus grand (par existence et unicité locales). Donc il existe un intervalle maximal d'existence  $I$ , et il est ouvert.

### 2.3.2 Existence globale ou sortie de tout compact

Soit  $\beta = \sup(I)$ . On suppose dans un premier temps que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^N$  (système autonome). Alors on a l'alternative suivante, dite principe des majorations a priori.

### Théorème 2.6. Principe des majorations a priori

Soit  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , localement lipschitzienne, et soit  $(I, u)$  une solution maximale du problème de Cauchy  $u'(t) = f(u(t))$ ,  $u(0) = u_0$ . Alors on a l'alternative suivante :

- Soit  $\beta = +\infty$ , i.e. on a existence globale,
- soit  $\beta < +\infty$  et dans ce cas,

$$\lim_{t \rightarrow \beta} |u(t)| = +\infty.$$

On parle d'explosion en temps fini.

### Exemple 2.7 Explosion vs existence globale

Considérons les problèmes de Cauchy suivants :

$$u' = u^2, u(0) = u_0, \quad u' = -u^2, u(0) = u_0,$$

avec  $u_0 > 0$ . Leurs solutions sont respectivement

$$u(t) = \frac{u_0}{1 - tu_0}, \quad u(t) = \frac{u_0}{1 + tu_0}.$$

Dans le premier cas, on a explosion en temps fini :

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{u_0}} u(t) = +\infty.$$

Dans le second cas, au contraire, on a existence globale.

### Remarque 2.8 Cas général : $f : U \subset \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}$

On parlera d'existence globale quand la solution existe pour tout temps  $t$  autorisé dans la définition du champ  $f$ , i.e. pour  $t \in P_1(U)$  où  $P_1$  désigne la projection sur la composante  $t$ .

L'alternative est alors la suivante (principe des majorations a priori).

- Si  $\sup(I) = \sup(P_1(U))$  alors on a existence globale,
- si  $\sup(I) = \beta < \sup(P_1(U))$  alors la solution sort de tout compact de  $U$  quand  $t \rightarrow \beta$ . On parle d'explosion en temps fini.

Preuve : si la solution restait dans un compact de  $U$ , alors on pourrait la prolonger par continuité en  $\beta$ , ainsi que sa dérivée, ce qui contredit la maximalité.

### Exemple 2.9 Système à deux corps

$$m_i x_i''(t) = G \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{x_j - x_i}{\|x_j - x_i\|^3}, 1 \leq i \leq 2,$$

On se ramène à un système du 1er ordre en posant

$$y = (x_1, x_2, x_1', x_2')^T.$$

Le champ de force est alors défini sur

$$U = \mathbb{R}^4 \setminus \{(x_1, x_1, x_3, x_4), x = 1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Pour une donnée initiale fixée, on a donc ou bien existence globale, ou bien la solution sort de tout compact de  $U$  quand  $t \rightarrow T_{max}$ . Attention, ici l'explosion en temps fini n'implique pas a priori que la norme de  $x$  tend vers l'infini, elle pourrait par exemple signifier que deux corps entrent en collision.

### 2.3.3 Cas globalement lipschitzien

On a existence globale dès que  $f$  est globalement lipschitzienne en  $x$  (et continue en  $(t, x)$ ); en particulier dans le cas linéaire

$$u'(t) = Au(t) + b(t), u(0) = u_0,$$

avec  $A$  et  $b$  continues en temps et bornées.

La preuve est la même que le théorème de Cauchy-Lipschitz local (théorème de point fixe contractant) mais ici la fonction peut être étudiée de façon globale.

## 2.4 Positivité des solutions

La préservation de la positivité est souvent essentielle dans les modèles physiques (par exemple, lorsque l'inconnue représente une concentration, une taille de population, une pression, etc.)

### Proposition 2.10. Préservation de la positivité

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$u'(t) = f(u(t)), u(0) = u_0,$$

avec  $u \in \mathbb{R}^N$  et  $u_0 \in (\mathbb{R}^+)^N$ . Une condition nécessaire et suffisante pour que la solution du problème de Cauchy reste positive pour tout temps  $t \geq 0$  est

$$f_i(r_1, \dots, r_{i-1}, 0, r_{i+1}, \dots, r_N) \geq 0, \forall r_1, \dots, r_N \geq 0, r_i = 0.$$

Une telle fonction est dite *quasi-positive*.

### Exemple 2.11 Modèle quadratique en cinétique chimique

Considérons une réaction chimique réversible de la forme



On note  $a, b$  les concentrations de  $A, B$ , et on note  $a_0 \geq 0, b_0 \geq 0$  les concentrations initiales. On admet qu'elles vérifient un système de la forme

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = f(a, b), \text{ avec } \begin{cases} f_1(a, b) = b^2 - a^2, \\ f_2(a, b) = a^2 - b^2. \end{cases}$$

On a

$$\forall b \geq 0, f_1(0, b) \geq 0, \forall a \geq 0, f_2(a, 0) \geq 0.$$

Ainsi, pour tout  $t \geq 0$ , la solution reste positive.

## 2.5 Méthode des rectangles invariants

On considère  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  localement lipschitzienne, et on étudie le problème de Cauchy (2). Une bonne façon de montrer l'existence globale est d'exhiber un compact dont la solution ne sortira pas.

### Définition 2.12. Rectangle invariant

Soit  $C$  un pavé de la forme

$$C = \{r \in \mathbb{R}^N, a_i \leq r_i \leq b_i, 1 \leq i \leq m\},$$

avec  $-\infty \leq a_i, b_i \leq +\infty$ .  $C$  est dit invariant pour (2) si toute solution  $u$  satisfait

$$u_0 \in C \Rightarrow \forall t \geq t_0, u(t) \in C.$$

Remarque : on autorise des pavés non compacts, par exemple l'invariance du pavé  $[0, +\infty[^N$  donne la positivité des solutions.

Supposons  $C$  invariant. Soit  $u_0 \in C$ , et  $u$  la solution de (2). Alors  $u$  est dérivable à droite en  $t_0$  et satisfait

$$u_i(t) = u_{0i} + (t - t_0)f_i(u_0) + o(t - t_0) \in [a_i, b_i].$$

En prenant  $u_{0i} = a_i$  (respectivement  $u_{0i} = b_i$ ), on trouve les conditions nécessaires

$$\forall u \in \partial C, \begin{cases} u_i = a_i & \Rightarrow f_i(u) \geq 0 \\ u_i = b_i & \Rightarrow f_i(u) \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

On va montrer qu'en fait, ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

### Proposition 2.13. CNS d'invariance d'un pavé

$C$  est invariant par (2) si et seulement si la condition (4) est satisfaite.

Démonstration : On a déjà vu que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Supposons cette condition réalisée, et soit  $u_0 \in C$ . On considère l'équation

$$w'(t) = f(P_C(w(t))) + P_C(w(t)) - w(t), \quad w(t_0) = u_0.$$

où  $P_C$  désigne la projection sur  $C$ , qui est une application lipschitzienne. On a existence d'une solution  $w(t), t \in [t_0, T]$ . On va montrer que, pour tout  $t \in [t_0, T]$ ,  $w(t) \in C$ . On en déduira que  $w$  est solution sur  $[t_0, T]$  de

$$u'(t) = f(u(t)), \quad u(t_0) = u_0,$$

donc la solution de cette équation reste dans  $C$  et  $C$  est invariant.

Par l'absurde : supposons qu'il existe  $t_1$  tel que  $w(t_1) \notin C$ , par exemple  $w_i(t_1) > b_i$ . Soit  $\rho > 0$  tel que  $w_i(t_1) - b_i > \rho$ . On pose

$$t^* = \inf\{t \geq t_0, w_i(t) > b_i + \rho\}.$$

On a  $w_i(t^*) = b_i + \rho \geq w_i(t)$ , pour tout  $t_0 \leq t \leq t^*$  donc  $w'_i(t^*) \geq 0$ . D'autre part, en utilisant l'équation différentielle,

$$w'_i(t^*) = f_i(P_C(w(t^*))) + (P_C(w(t^*)))_i - w_i(t^*) = f_i(P_C(w(t^*))) + b_i - (b_i + \rho)$$

et, d'après la condition sur  $f$ , on a  $f_i(P_C(w(t^*))) \leq 0$ . Finalement, on a bien montré  $w'_i(t^*) \leq -\rho < 0$ , d'où la contradiction.

### Retour sur l'exemple 2.11 : modèle quadratique en cinétique chimique

Pour tout  $M > 0$ , le carré  $[0, M] \times [0, M]$  est invariant. En effet,  $f$  pointe partout vers l'intérieur du carré.

### Exemple 2.14 Fitzhugh-Nagumo

On présente ici le modèle de Fitzhugh-Nagumo pour la propagation d'un potentiel d'action le long d'une fibre nerveuse. Ce modèle comprend normalement un terme de diffusion (opérateur laplacien) que l'on omet ici pour simplifier. On considère donc le système :

$$\begin{aligned} u' &= f(u) - v \\ v' &= \sigma u - v \end{aligned}$$

où  $f(u) = u(1-u)(u-2)$  et  $\sigma > 1/4$ . Ici,  $u$  désigne le potentiel membranaire,  $v$  est une variable de recouvrement. On note

$$F(u, v) = \begin{pmatrix} f(u) - v \\ \sigma u - v \end{pmatrix},$$

On régionne le plan selon les signes de  $F_1$  et  $F_2$ . On détermine ainsi une boîte  $C = [-a_1, b_1] \times [-a_2, b_2]$  invariante par le flot de  $F$ . Ainsi, si la donnée initiale est dans cette boîte, on a existence globale de la solution.

## 3 Portrait de phase et comportement qualitatif

### Remarque 3.1

Dans cette section, on se limitera aux équations autonomes. En effet, dans le cas d'un système non autonome, il est délicat de travailler dans le plan de phase car le champ de vecteurs se modifie au cours du temps. (En particulier, les orbites peuvent se recouper...)

On fixe donc  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^N$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ , supposée de classe  $C^1$ , et on s'intéresse au problème (2).

### Terminologie

- On appelle orbite ou trajectoire toute courbe paramétrée  $(x(t), t \in I)$  où  $(I, x)$  est une solution maximale de (2). Dans le cas autonome, les orbites ne se coupent jamais (unicité locale dans CL). Par contre, deux orbites peuvent se rejoindre "à l'infini", en des points stationnaires.
- On appelle portrait de phase une représentation géométrique dans l'espace des phases  $\mathbb{R}^N$  de quelques orbites, destinée à illustrer le comportement qualitatif des solutions de l'équation.

### 3.1 Points réguliers et redressement du flot

Un point  $x_0 \in U$  est dit régulier si  $f(x_0) \neq 0$ . Dans ce cas on a le théorème suivant

### Théorème 3.2. Redressement du flot

Soit  $x_0$  un point régulier pour l'équation (2). Alors il existe  $V$ , respectivement  $W$  voisinages de  $x_0$ , respectivement  $0$ , dans  $\mathbb{R}^N$ , et il existe  $\phi : V \rightarrow W$  un  $C^1$ -difféo, tel que

$$\forall x \in V, D\phi(x) \cdot f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rem : la preuve repose de façon essentielle sur le théorème d'inversion locale, voir Schwartz Analyse, T2 ou Rouvière exo 69. Moralité : pas de surprise au voisinage d'un point régulier...

## 3.2 Points singuliers, exemples

### Définition 3.3. Points singuliers



Un point  $x_0 \in U$  est dit singulier ou critique ou stationnaire ou point d'équilibre pour (2) si  $f(x_0) = 0$ .

Ex : le pendule oscillant avec frottement

$$\theta'' + \frac{k}{ml}\theta' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{5}$$

Pour simplifier on suppose  $m = l = 1$ . On se ramène à un problème d'ordre 1 en posant

$$x = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -kx_2 - g \sin x_1 \end{pmatrix}.$$

Points d'équilibre :

$$(x_1, x_2) = (k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$$

correspondant à  $\theta = k\pi$ . Modulo  $2\pi$  on a donc deux équilibres "physiques". Physiquement, ils sont de nature différente, l'un étant stable et l'autre instable. Nous allons voir comment sont définies ces notions mathématiquement.

## 4 Stabilité des points d'équilibre

### 4.1 Définitions

#### Définition 4.1. Stabilité, stabilité asymptotique

Soit  $x_0$  un point d'équilibre pour une équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)). \quad (6)$$

- $x_0$  est dit stable si "toutes les trajectoires qui passent assez près de  $x_0$  restent dans un bassin d'attraction", plus précisément

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (I, x)$  solution de (6),

$$(\exists t_0 \in I, |x(t_0) - x_0| \leq \delta) \Rightarrow \begin{cases} x \text{ est définie pour tout } t \geq t_0 \\ |x(t) - x_0| \leq \epsilon, \forall t \geq t_0. \end{cases}$$

- $x_0$  est dit instable s'il n'est pas stable.
- $x_0$  est dit asymptotiquement stable s'il est stable et si

$$\exists \delta > 0, \forall (I, x) \text{ solution de (6), } (\exists t_0 \in I, |x(t_0) - x_0| \leq \delta) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0. \quad (7)$$

#### Remarque 4.2 Stabilité asymptotique

Dans le cas non linéaire, la condition (7) ne suffit pas à garantir la stabilité, comme le montre le contre-exemple suivant, en coordonnées polaires, voir [4], pb 7 p. 247 :

$$\begin{cases} r' = r(1 - r) \\ \theta' = r(1 - \cos(\theta)) \end{cases}$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$\begin{cases} x' = x(1 - r) + y(x - r) \\ y' = y(1 - r) - x(x - r) \end{cases}, r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

dont les solutions sont données, si  $r(0) \leq 1$ , par

$$\begin{cases} r(t) = \frac{ke^t}{ke^t + 1} \\ \theta(t) = 2 \arctan\left(\frac{1}{\alpha - \ln(1 + ke^t)}\right). \end{cases}$$

Le point  $(1, 0)$  est instable. En effet, il existe une orbite dite homocline, qui tend vers  $(1, 0)$  à la fois quand  $t \rightarrow -\infty$  et quand  $t \rightarrow +\infty$ . Elle correspond à la solution :

$$\forall t \in \mathbb{R}, r(t) = 1, \theta(t) = \pi + 2 \arctan\left(\frac{1}{t}\right).$$

## 4.2 Stabilité des points singuliers dans le cas linéaire

On considère maintenant un système différentiel linéaire de la forme

$$x' = Ax \quad (8)$$

où  $A$  est une matrice carrée à coefficients constants. Alors les solutions sont globales et forment un ev de dimension  $N$ . Les points d'équilibre correspondent au noyau de l'endomorphisme associé à  $A$ .

Les solutions de (8) sont de la forme

$$x(t) = e^{tA}x_0, t \in \mathbb{R}.$$

Le comportement asymptotique dépend des valeurs propres de  $A$ .

### 4.2.1 Cas d'une valeur propre unique

On suppose dans un premier temps que  $A$  a une seule valeur propre  $\lambda$ , et on note

$$\mu_A(X) = (X - \lambda)^s$$

le polynôme minimal de  $A$ .

Par le théorème de Jordan,  $A$  est semblable à une matrice  $J(\lambda)$  de la forme

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \epsilon_1 & \lambda & \ddots & & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \epsilon_{N-1} & \lambda \end{pmatrix}, \epsilon_i \in \{0, 1\}.$$

On distingue trois cas.

- $Re(\lambda) > 0$ . Alors si  $v$  est un vecteur propre,  $y(t) = ve^{\lambda t}$  est solution de (8) et on a

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|y(t)\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t)\| = +\infty.$$

On dit que 0 est instable.

- $Re(\lambda) < 0$ . On écrit  $A = PJP^{-1}$  et  $Y = P^{-1}y$ . Alors  $y$  est solution de (8) si et seulement si  $Y$  est solution de  $Y' = J(\lambda)Y$ . Ce système étant triangulaire, on le résout explicitement.

$$Y' = J(\lambda)Y \iff \begin{cases} Y'_1 = \lambda Y_1 \\ Y'_2 = \epsilon_1 Y_1 + \lambda Y_2 \\ \vdots \\ Y'_N = \epsilon_{N-1} Y_{N-1} + \lambda Y_N \end{cases} \\ \iff \begin{cases} Y_1 = C_1 e^{\lambda t} \\ (Y_2 e^{-\lambda t})' = \epsilon_1 C_1 \\ \vdots \\ (Y_N e^{-\lambda t})' = \epsilon_{N-1} Y_{N-1} e^{-\lambda t} \end{cases}$$

Les solutions s'écrivent sous la forme

$$\forall i, Y_i(t) = p_i(t)e^{\lambda t},$$

avec  $p_i$  un polynôme de degré au plus  $i - 1$ . On en déduit que  $Y(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . En revenant aux inconnues  $y_i$  il vient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t)\| = 0.$$

En remarquant que

$$\|y(t)\|^2 = q(t)e^{2\alpha t}, \quad \alpha = \operatorname{Re}(\lambda) < 0,$$

où  $q$  est un polynôme qui reste strictement positif (par unicité dans Cauchy-Lipschitz), on peut montrer qu'il existe deux réels  $m, M > 0$  tels que

$$\forall t > 0, me^{2\alpha t} \leq \|y(t)\|^2 \leq Me^{\alpha t}.$$

On en déduit (après un peu de travail technique) que 0 est asymptotiquement stable.

- $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ . Comme ci-dessus, on a pour tout  $1 \leq i \leq N$ ,  $Y_i(t) = p_i(t)e^{\lambda t}$ , et donc  $|Y_i(t)| = |p_i(t)|$ . On en déduit que  $\|Y(t)\|$  est non bornée, sauf si tous les  $p_i$  sont constants, ce qui se produit si et seulement si  $J$  est diagonale, i.e.  $s = 1$ . De même, en revenant aux inconnues  $y_i$  il vient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t)\| = +\infty$$

sauf si  $s = 1$ , auquel cas  $y$  est bornée. On dit que 0 est stable si  $s = 1$ , instable sinon.

Bilan. On a les comportements suivants.

$\operatorname{Re}(\lambda) < 0$	$\operatorname{Re}(\lambda) = 0$		$\operatorname{Re}(\lambda) > 0$
	$\lambda$ non défective $s = 1$	$\lambda$ défective $s \geq 2$	
0 stable asymptotiquement stable	0 stable	0 instable	0 instable

#### 4.2.2 Cas général

Soit  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} = \operatorname{Sp}(A)$ . On note

$$\chi_A(X) = (-1)^N (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_k)^{m_k}, \quad \mu_A(X) = (X - \lambda_1)^{s_1} \dots (X - \lambda_k)^{s_k}$$

les polynômes caractéristique et minimal de  $A$ . Enfin, on note  $E_i = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)$  le sous-espace propre associé à  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . On a donc

$$1 \leq s_i = 1 + m_i - \dim(E_i) \leq m_i, 1 \leq i \leq k.$$

Par le théorème de Jordan,  $A$  est semblable à une matrice  $J$  diagonale par blocs de la forme

$$J = \operatorname{Diag}(J(\lambda_1), \dots, J(\lambda_k)),$$

avec  $J(\lambda_i)$  comme ci-dessus. De plus, le bloc  $J(\lambda_i)$  est diagonal si et seulement si  $s_i = 1$ , ou encore  $\dim(E_i) = m_i$ . (On dit alors que  $\lambda_i$  est non défective.)

En se restreignant aux sous-espaces caractéristiques, on se ramène au cas précédent, on a donc le résultat suivant, que l'on présente ci-dessous sous forme de tableau puis sous forme d'un théorème.

$\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(A), \operatorname{Re}(\lambda) < 0$	$\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(A), \operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ et $\exists \lambda \in \operatorname{Sp}(A) \cap i\mathbb{R}$		$\exists \lambda \in \operatorname{Sp}(A), \operatorname{Re}(\lambda) > 0$
	$\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(A) \cap i\mathbb{R}$ , $\lambda$ non défective $s_\lambda = 1$	$\exists \lambda \in \operatorname{Sp}(A) \cap i\mathbb{R}$ , $\lambda$ défective $s_\lambda \geq 2$	
0 stable asymptotiquement stable	0 stable	0 instable	0 instable

### Théorème 4.3. Stabilité, cas linéaire à coefficients constants

Soit un système différentiel de la forme  $u'(t) = Au(t)$ , où  $A$  est une matrice à coefficients constants. On a les cas suivants :

- si  $\forall \lambda \in Sp(A), Re(\lambda) < 0$ , alors 0 est asymptotiquement stable.
- si  $\forall \lambda \in Sp(A), Re(\lambda) \leq 0$  et  $\exists \lambda \in Sp(A) \cap i\mathbb{R}$ , alors deux sous-cas sont à distinguer :
  - si  $\exists \lambda \in Sp(A) \cap i\mathbb{R}$ ,  $\lambda$  déficiente, alors 0 est instable ;
  - si  $\forall \lambda \in Sp(A) \cap i\mathbb{R}$ ,  $\lambda$  est non déficiente, alors 0 est stable, non asymptotiquement stable.
- si  $\exists \lambda \in Sp(A), Re(\lambda) > 0$ , alors 0 est instable.

#### Exemple 4.4 Pendule linéarisé

On considère les équations du pendule avec frottement visqueux, et on suppose que les oscillations restent petites. On peut donc linéariser les équations présentées précédemment (5). On obtient le système :

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -gx_1 - kx_2 \end{cases}$$

ou encore  $X' = AX$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & -k \end{pmatrix}.$$

Que dire de la stabilité de l'équilibre  $(0, 0)$  ? Posons pour simplifier  $g = 1$ . Alors les valeurs propres de  $A$  sont

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - 1}, & \text{si } k^2 > 4, \\ -\frac{k}{2}, & \text{si } k^2 = 4, \\ -\frac{k}{2} \pm i\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}, & \text{si } k^2 < 4. \end{cases}$$

Deux cas se présentent.

- Si  $k > 0$  (avec frottement), alors 0 est asymptotiquement stable. Le pendule présente des oscillations amorties et revient en temps infini vers son équilibre.
- Si  $k = 0$  (sans frottement), alors 0 est stable. Le pendule présente des oscillations non amorties.

Remarquons enfin que ce résultat ne s'applique pas dans le cas non autonome, comme l'illustre le contre-exemple suivant.

#### Exemple 4.5 Stabilité dans le cas linéaire non autonome

Soit  $X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t/2} \cos t \\ e^{t/2} \sin t \end{pmatrix}$ . La fonction  $\|X(t)\|$  n'est pas bornée quand  $t \rightarrow +\infty$ . Pourtant, en dérivant  $X$ , on montre qu'elle vérifie l'équation différentielle linéaire

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad \text{où } A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2 t & 1 - \frac{3}{2} \sin t \cos t \\ -1 - \frac{3}{2} \sin t \cos t & -1 + \frac{3}{2} \sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $A(t)$  se calculent aisément et valent

$$-\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Elles sont donc à partie réelle strictement négative, et cependant  $(0, 0)$  est instable pour l'équation différentielle au sens des définitions 4.1.

### 4.2.3 Classification des points singuliers dans le cas linéaire

Voir par exemple [8].

#### Définition 4.6. Points critiques hyperboliques

- On dit qu'un point critique est hyperbolique si toutes les valeurs propres de la matrice ont une partie réelle non nulle.
- On dit qu'un point critique est un puits si toutes les valeurs propres de la matrice ont une partie réelle strictement négative.
- On dit qu'un point critique est une source si toutes les valeurs propres de la matrice ont une partie réelle strictement positive.
- On dit qu'un point critique est un point-selle s'il est hyperbolique et si la matrice possède au moins une valeur propre à partie réelle positive et une valeur propre à partie réelle négative.

## 4.3 Cas non linéaire

Reprenons l'exemple de l'équation du pendule non linéaire

$$\theta + \frac{g}{l} \sin \theta + k\theta' = 0,$$

que peut-on dire de la stabilité des points d'équilibre  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ ? A quoi ressemblent les trajectoires dans le plan de phase?

### 4.3.1 Théorème de linéarisation

### Théorème 4.7. Stabilité des équilibres, cas non linéaire

Soit 0 un équilibre pour un système différentiel non linéaire

$$x'(t) = f(x(t)),$$

où  $f$  est différentiable en 0. On note  $Df(0)$  la différentielle de  $f$  en 0. On a les résultats suivants.

- i Si pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $Df(0)$ , on a :  $Re(\lambda) < 0$ , alors 0 est asymptotiquement stable. En particulier, on a

$$\forall \mu \in ]0, \min_{1 \leq k \leq N} (-Re(\lambda_k)) [ , \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \\ |x(t_0)| < \delta \Rightarrow \forall t \geq t_0, x(t) \text{ existe et } |x(t)| \leq \epsilon e^{-\mu(t-t_0)}. \quad (9)$$

- ii S'il existe une valeur propre  $\lambda$  de  $Df(0)$ , avec  $Re(\lambda) > 0$ , alors 0 est instable.  
 iii Si pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $Df(0)$ , on a :  $Re(\lambda) \leq 0$ , et s'il existe des valeurs propres imaginaires pures, alors on ne sait pas conclure.

### Exemple 4.8 Exemples en une dimension

- i  $u' + au^3 = 0$ .

On pose  $f(u) = u^3$ . Alors 0 est le seul point d'équilibre, et  $f'(0) = 0$ . Le théorème ne permet pas de conclure quant à la stabilité de l'équilibre. Les solutions se calculent explicitement, et sont de la forme :

$$u(t) = \frac{u_0}{\sqrt{1 + 2atu_0^2}}.$$

On voit qu'on a les cas suivants.

- si  $a > 0$ , les solutions sont globales pour  $t \geq 0$  et tendent vers 0 en décroissant : 0 est asymptotiquement stable,
  - si  $a = 0$ , les solutions sont constantes : 0 est stable, non asymptotiquement stable,
  - si  $a < 0$ , les solutions explosent en temps fini : 0 est instable.
- ii  $u' = u - au^2$ ,  $a \neq 0$ .

On pose  $f(u) = u - au^2$ . On a deux points d'équilibre, 0 et  $\frac{1}{a}$ , avec  $f'(0) = 1$ ,  $f'(1/a) = -1$ . Le théorème permet de conclure que 0 est instable, et  $\frac{1}{a}$  est asymptotiquement stable.

Idées de preuve du théorème. Cas i.

Notons  $A = Df(0)$  et plaçons-nous dans les hypothèses du cas i. On veut montrer que, pour  $|x(t_0)|$  assez petit,  $|x(t)|$  décroît exponentiellement. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Donc si on montre le résultat pour une norme différente, il sera encore valable pour la norme usuelle. On va donc s'autoriser à changer le produit scalaire et la norme pour obtenir plus facilement le résultat.

On a

$$\frac{d}{dt} |x|^2 = 2\langle x', x \rangle = 2|x| \frac{d|x|}{dt}$$

donc

$$\frac{d}{dt} |x| = \frac{\langle x', x \rangle}{|x|} = \frac{\langle f(x), x \rangle}{|x|^2}.$$

Pour avoir la décroissance exponentielle avec le taux  $\mu$ , il suffit de montrer que, pour  $x$  suffisamment petit,  $\langle f(x), x \rangle \leq -\mu|x|^2$ . Pour  $x$  petit,  $f(x)$  ressemble à  $Ax$ , puis précisément

$$|\langle f(x) - Ax, x \rangle| = o(|x|^2).$$

Laissons-nous un peu de marge pour prendre en compte ce reste, en choisissant un réel  $c$  tel que

$$c \in \left] \min_{1 \leq k \leq N} (-\operatorname{Re} \lambda_k), -\mu \right[.$$

Il suffit donc de montrer que, pour tout  $x$  assez petit, on a

$$\langle Ax, x \rangle \leq c|x|^2. \quad (10)$$

Pour construire un produit scalaire et une norme vérifiant l'estimation (10), on remarque que  $Df(0)$  est diagonalisable par blocs sur  $\mathbb{R}^N$  : il existe une base  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_N)$  dans laquelle la matrice de  $Df(0)$  s'écrit

$$Df(0) = \operatorname{diag}(A_1, \dots, A_p), \quad \text{où}$$

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_j \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A_j = \begin{pmatrix} D_j & & & \\ I_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & I_2 & D_j \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad D_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}.$$

Les blocs du premier type correspondent aux valeurs propres réelles, ceux du second type correspondent aux valeurs propres complexes  $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ . Soient  $b_i, \dots, b_{i+r}$  les vecteurs de la base  $\mathcal{B}$  correspondant à un bloc  $A_j$  du premier type. Fixons  $\epsilon > 0$ . Quitte à remplacer les vecteurs correspondants par  $b_i, \frac{1}{\epsilon}b_{i+1}, \dots, \frac{1}{\epsilon^r}b_{i+r}$ , on se ramène à un bloc

$$\tilde{A}_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & & & \\ \epsilon & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \epsilon & \lambda_j \end{pmatrix},$$

de sorte que, pour un vecteur  $\tilde{x}$  de taille  $r$ ,

$$\langle \tilde{A}_j \tilde{x}, \tilde{x} \rangle \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_j |\tilde{x}|^2.$$

On procède de même pour les blocs du deuxième type. En choisissant  $\epsilon$  assez petit, on construit ainsi un produit scalaire et une norme sur  $\mathbb{R}^N$  vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \langle Ax, x \rangle \leq c|x|^2.$$

Ainsi, pour tout  $x$  assez petit, on a  $\langle f(x), x \rangle \leq -\mu|x|^2$  et donc  $\frac{d}{dt}|x| \leq -\mu|x|$ . On en déduit que la solution existe pour tout temps  $t \geq t_0$  et qu'elle décroît exponentiellement :

$$|x(t)| \leq \epsilon e^{-\mu(t-t_0)}.$$

### 4.3.2 Cas du pendule oscillant

Reprenons l'exemple de l'équation du pendule non linéaire

$$\theta'' + \frac{g}{l} \sin \theta + k\theta' = 0,$$

ou de sa reformulation comme système d'ordre 1,

$$x' = f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -kx_2 - \frac{g}{l} \sin x_1 \end{pmatrix}.$$

Que peut-on dire de la stabilité des points d'équilibre  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  ?

équilibre $(0, 0)$	équilibre $(\pi, 0)$
$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix}$	$Df(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k \end{pmatrix}$
$\lambda_{\pm} = \begin{cases} -\frac{k}{2} \pm i\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}, & k \leq 2 \\ -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - 1}, & k > 2 \end{cases}$	$\lambda_{\pm} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{k^2}{4}},$
<p>si <math>k &gt; 0</math>, <math>(0, 0)</math> est asymptotiquement stable si <math>k = 0</math> on ne sait pas conclure</p> <p><math>(0, 0)</math> est stable pour le linéarisé.</p>	<p>pour tout <math>k</math>, <math>(\pi, 0)</math> est instable : <math>\lambda^+ &gt; 0</math>.</p>

### 4.3.3 Complément : théorème de Hartman-Grobman

On admettra le résultat suivant (difficile).

#### Théorème 4.9. Hartman-Grobman

Si  $0$  est un point critique hyperbolique, alors les trajectoires sont localement homéomorphes à celles du système linéarisé, i.e.  
il existe  $U, V$ , voisinages de  $0$ , il existe  $\theta : U \rightarrow V$  homéomorphisme, tels que  
si  $x$  est une solution vérifiant  $\forall t \in I, x(t) \in U$ , alors pour  $t \in I, y(t) = \theta(x(t)) \in V$  vérifie  
 $y'(t) = Df(0) \cdot y(t)$ .

Autrement dit, localement, les trajectoires ressemblent à celles du système linéarisé, sauf au voisinage d'un point non hyperbolique (par exemple un centre).

## 5 Fonctions de Lyapunov et applications

### 5.1 Définitions et résultats de stabilité

#### Définition 5.1. Fonction de Lyapunov

Soit  $0$  un équilibre d'un système différentiel autonome  $x' = f(x)$ , et  $U$  un voisinage de  $0$ . Une application  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ , continue, différentiable sur  $U \setminus \{0\}$  est une fonction de Lyapunov si les deux conditions ci-dessous sont vérifiées.

$$\forall x \in U \setminus \{0\}, \quad \Phi(0) = 0 < \Phi(x) \quad (11)$$

$$\forall x \in U \setminus \{0\}, \quad \langle \nabla \Phi(x), f(x) \rangle \leq 0 \quad (12)$$

On dit que  $\Phi$  est une fonction de Lyapunov stricte si (12) est satisfaite avec une inégalité stricte. On dit que c'est une intégrale première si l'égalité est vérifiée dans (12).

#### Remarque 5.2

- On remarque qu'une fonction de Lyapunov décroît toujours le long des trajectoires du système différentiel :

$$\frac{d}{dt} \Phi(x(t)) = \langle \nabla \Phi(x(t)), f(x(t)) \rangle \leq 0.$$

- Il n'existe pas toujours des fonctions de Lyapunov. Lorsqu'elles existent, il n'est pas toujours facile de les trouver.
- Pour les systèmes provenant de la physique, l'énergie est souvent une fonction de Lyapunov (elle est conservée ou dissipée).

On a le résultat ci-dessous.

#### Théorème 5.3. Stabilité non linéaire, fonctions de Lyapunov

- i Si une fonction de Lyapunov existe, alors  $0$  est un équilibre stable.
- ii Si une fonction de Lyapunov stricte existe, alors  $0$  est un équilibre asymptotiquement stable.

Preuve :

- i Soit  $\epsilon > 0$  tel que  $B_\epsilon \subset U$ , avec  $U$  comme dans la définition. On note  $S_\epsilon = \partial B_\epsilon$ , c'est un compact donc

$$\alpha = \min_{x \in S_\epsilon} \Phi(x) > 0.$$

Notons

$$U_1 = \{x \in B_\epsilon, \Phi(x) < \alpha\}.$$

Par continuité de  $\Phi$ ,  $U_1$  est un ouvert et  $U_1$  contient  $0$ .

Soit  $x_0 \in U_1$ . Alors le problème de Cauchy

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

a une solution locale  $x$  qui vérifie

$$\forall t \in ]0, T[, \Phi(x(t)) \leq \Phi(x_0) < \alpha.$$

Par continuité, la trajectoire ne peut pas traverser  $S_\epsilon$  donc elle reste dans  $B_\epsilon$  qui est relativement compacte. D'où l'existence de la solution pour tout  $t > 0$  et  $\forall t > 0, |x(t)| < \epsilon$ . Ainsi, 0 est stable.

ii Soit  $x_0 \in U_1$ , défini comme ci-dessus. Alors la trajectoire  $\{x(t), t > 0\}$  reste dans le compact  $\bar{B}_\epsilon$ . On peut donc en extraire une suite de points qui converge.

$$\exists t_n \rightarrow +\infty, \exists z_0 \in \bar{B}_\epsilon, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n) = z_0.$$

On suppose la suite  $(t_n)$  croissante. La fonction  $\Phi$  étant de Lyapunov, la suite  $\Phi(x(t_n))$  décroît vers  $\Phi(z_0)$ . Or pour tout  $t > 0, \exists n \in \mathbb{N}, t_n > t$  donc

$$\Phi(x(t)) \geq \Phi(x(t_n)) \geq \Phi(z_0). \quad (13)$$

En particulier, on a  $\Phi(z_0) < \alpha$  donc  $z_0 \in U_1$ .

Supposons  $z_0 \neq 0$ . Alors on a

$$\langle \nabla \Phi(z_0), f(z_0) \rangle < 0.$$

En particulier, si on considère le problème de Cauchy

$$z'(t) = f(z(t)), \quad z(0) = z_0,$$

alors on a existence globale de solutions  $z$  vérifiant

$$\forall t > 0, \Phi(z(t)) < \Phi(z_0).$$

Fixons  $t = 1$ . Par continuité de flot, il existe  $\delta > 0$ , tel que  $B(z_0, \delta) \subset U_1$  et pour tout  $y_0 \in B(z_0, \delta)$ , la solution du problème de Cauchy

$$y'(t) = f(y(t)), \quad y(0) = y_0$$

vérifie :  $\Phi(y(1)) < \Phi(z_0)$ .

On choisit  $y_0 = x(t_n)$  pour  $n$  assez grand. Il vient alors  $y(1) = x(t_n + 1)$  d'où  $\Phi(x(t_n + 1)) < \Phi(z_0)$ . Or ce résultat contredit (13). On a donc nécessairement  $z_0 = 0$ .

La famille  $\{x(t), t > 0\}$  a pour seule valeur d'adhérence  $z_0 = 0$  et est relativement compacte, donc elle converge vers 0. Ainsi, 0 est asymptotiquement stable.

## 5.2 Application au pendule sans frottement

On note  $\Phi(x) = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + mgl(1 - \cos x_1)$  l'énergie mécanique du pendule. En l'absence de frottement, cette énergie est conservée. Posons  $m = g = l = 1$ . Alors on a

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + 1 - \cos(x_1) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + o(x_1^2)$$

donc  $\Phi$  atteint un minimum local strict en  $(0, 0)$ . Ainsi, elle fournit une fonction de Lyapunov en  $(0, 0)$ . On en déduit la stabilité de  $(0, 0)$ . De plus, les trajectoires sont incluses dans les lignes de niveau de  $\Phi$ . Voir des représentations dans le plan de phase et en fonction du temps de quelques trajectoires sur les figures 1 et 2.

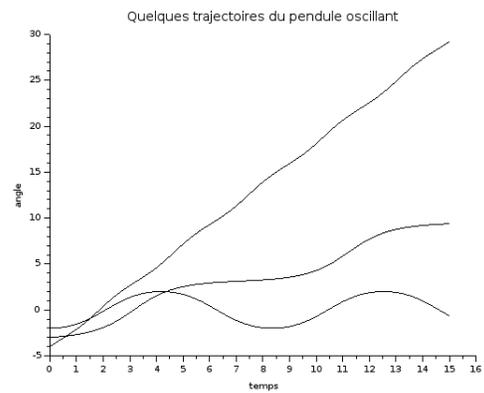
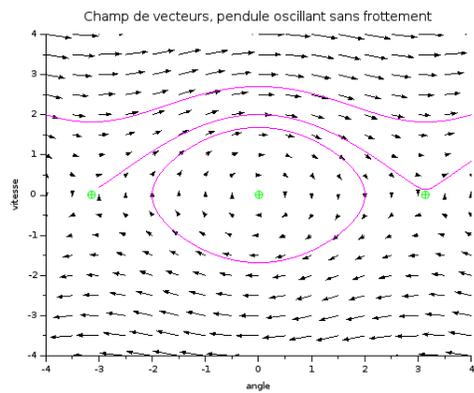


FIGURE 1 – Représentation dans le plan de phase et en fonction du temps de quelques trajectoires du pendule sans frottement.

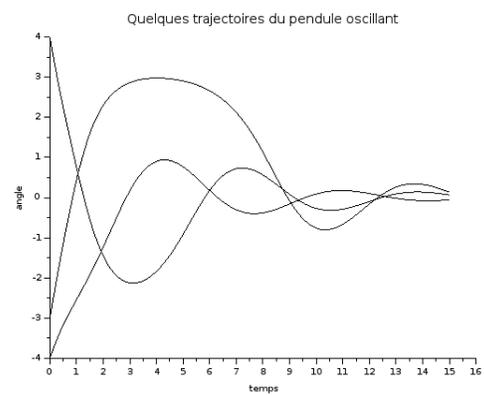
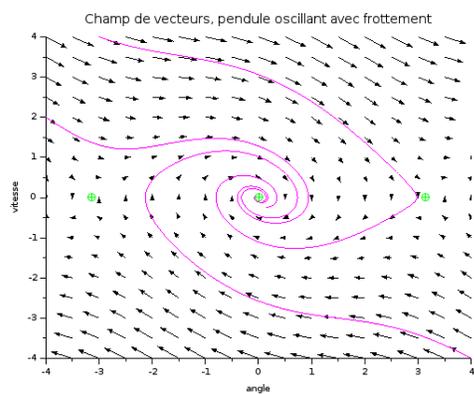


FIGURE 2 – Représentation dans le plan de phase et en fonction du temps de quelques trajectoires du pendule avec frottement.

## 6 Etude de cas : populations en interaction

On considère deux populations de taille respective  $u_1$  et  $u_2$ . On néglige les variations spatiales. Ces populations interagissent, on pourra distinguer trois types d'interaction : la compétition, la symbiose, ou le système proie-prédateur. On note  $a, c \in \mathbb{R}$  les taux de croissance intrinsèque des deux espèces,  $b, d$  les coefficients régissant l'interaction, et  $\alpha > 0, \beta > 0$  des coefficients de saturation qui limitent la croissance des populations. L'évolution des populations est alors donnée par le système

$$u_1' = u_1(a + bu_2 - \alpha u_1) \quad (14)$$

$$u_2' = u_2(c + du_1 - \beta u_2) \quad (15)$$

$$u_1(0) = u_1^0 \geq 0, \quad u_2(0) = u_2^0 \geq 0. \quad (16)$$

On peut distinguer les cas suivants, en fonction des signes de  $b$  et  $d$  :

- si  $b > 0, d > 0$  : populations en symbiose,
- si  $b > 0, d < 0$  : système proie-prédateur (la population 1 est le prédateur, 2 est la proie)
- si  $b, d < 0$  : populations en compétition.

Ce système peut se réécrire sous la forme  $u'(t) = F(u(t))$ , avec  $F$  une fonction de classe  $C^1$ . Donc on a existence et unicité locale d'une solution.

On peut se poser naturellement les questions suivantes :

- a-t-on existence globale ?
- les solutions restent-elles positives ? sont-elles bornées ?
- quels sont les états d'équilibre du système ? sont-ils stables ?
- à quoi ressemblent les trajectoires dans le plan de phase ?

Dans la suite, on se limitera au cas proie-prédateur.

### 6.1 Positivité et bornes a priori

Pour toutes valeurs des paramètres, la fonction  $F$  est quasi-positive, i.e.

$$\forall u_1, u_2 \geq 0, F_1(0, u_2) \geq 0, F_2(u_1, 0) \geq 0.$$

On en déduit que les solutions restent positives au cours du temps, ce qui est rassurant pour des tailles de populations. Le caractère borné va dépendre des signes des paramètres.

On suppose ici  $a, d > 0, b, c < 0$ , cherchons un rectangle de la forme  $[0, A] \times [0, B]$  invariant. Pour cela, il faut et il suffit que

$$\forall u_1 \in [0, A], \forall u_2 \in [0, B], F_1(A, u_2) \leq 0, F_2(u_1, B) \leq 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \forall u_2 \in [0, B], F_1(A, u_2) \leq 0 &\iff \forall u_2 \in [0, B], a + bu_2 - \alpha A \leq 0 \\ &\iff a - \alpha A \leq 0 \\ &\iff A \geq \frac{a}{\alpha}. \end{aligned}$$

De même,

$$\forall u_1 \in [0, A], F_2(u_1, B) \leq 0 \iff B \geq \frac{dA + c}{\beta}.$$

Ainsi, pour toute donnée  $u^0 \in (\mathbb{R}^+)^2$ , en choisissant

$$A = \max\left(\frac{a}{\alpha}, u_1^0\right), \quad B = \max\left(\frac{dA + c}{\beta}, u_2^0\right),$$

on obtient que la trajectoire reste dans le rectangle  $[0, A] \times [0, B]$  d'où l'existence globale de solutions.

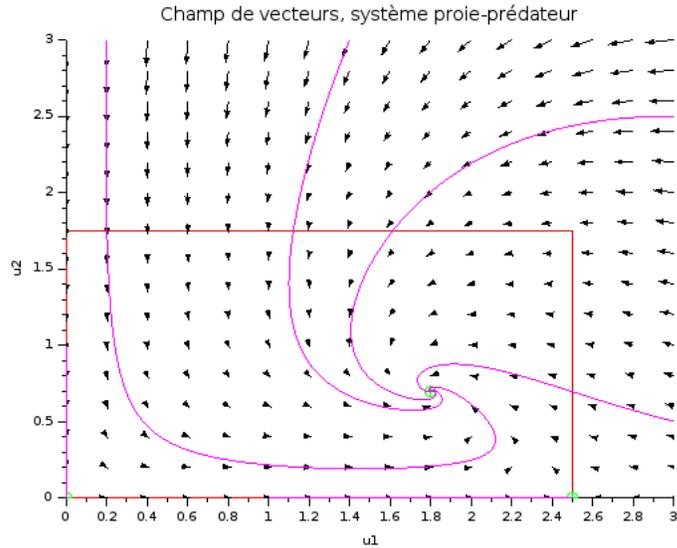


FIGURE 3 – Représentation du champ de vecteurs pour un système proie-prédateur. Ici  $a = 2.5$ ,  $c = -2$ ,  $b = -1$ ,  $d = 1.5$ . Le rectangle rouge est le rectangle invariant minimal. Les marques vertes représentent les trois points d'équilibre. Les courbes mauves sont des trajectoires calculées par la méthode de Runge-Kutta 4 (voir section 7).

## 6.2 États d'équilibre

Cherchons les états d'équilibre du système, en résolvant  $F(u) = 0$ . On obtient trois solutions  $(0, 0)$ ,  $(\frac{a}{\alpha}, 0)$  et  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$  défini par

$$\begin{cases} c + d\bar{u}_1 - \beta\bar{u}_2 = 0 \\ a - \alpha\bar{u}_1 + b\bar{u}_2 = 0. \end{cases}$$

La différentielle de  $F$  en un point  $(u_1, u_2)$  est donnée par la matrice jacobienne

$$Df(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} a + bu_2 - 2\alpha u_1 & bu_1 \\ du_2 & c + du_1 - 2\beta u_2 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad Df\left(\frac{a}{\alpha}, 0\right) = \begin{pmatrix} -a & \frac{ba}{\alpha} \\ 0 & c + d\frac{a}{\alpha} \end{pmatrix}, \quad Df(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = \begin{pmatrix} -\alpha\bar{u}_1 & b\bar{u}_1 \\ d\bar{u}_2 & -\beta\bar{u}_2 \end{pmatrix}.$$

Le point  $(0, 0)$  est un équilibre instable. Le point  $(\frac{a}{\alpha}, 0)$  est asymptotiquement stable si  $ad < -\alpha c$ , et instable si  $ad > -\alpha c$ . Le point  $\bar{u}$  est asymptotiquement stable.

## 7 Approximation numérique

Dans toute cette section, on considère un système différentiel de la forme

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0. \quad (17)$$

où  $f$  sera supposée de classe  $C^1$ . Pour simplifier, on suppose  $t_0 = 0$ . Remarquons que  $x$  est solution de (17) sur l'intervalle  $[0, T]$  si et seulement si elle vérifie la formulation intégrale

$$\forall t \in [0, T], y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds. \quad (18)$$

Ainsi, pour approcher les solutions de (1) sur un intervalle  $[0, T]$ , il suffit d'utiliser une méthode d'intégration numérique pour le membre de droite de (18).

### 7.1 Quelques méthodes classiques

Elles découlent des méthodes classiques pour l'intégration numérique. Voir la table 7.1. On suppose ici, pour simplifier, que l'intervalle d'étude  $[0, T]$  est subdivisé avec un pas constant  $h = T/N$ , et on note  $t_n = nh$ ,  $y_n \approx y(t_n)$ .

Notons que les méthodes d'Euler explicite, Heun, Runge-Kutta sont explicites :  $y_{n+1}$  s'obtient à partir de  $y_n$  par un ou une série de calculs explicites. A l'inverse, les méthodes d'Euler implicite et de Crank Nicolson sont implicites : elles nécessitent à chaque étape la résolution d'une équation. Si  $f$  est non linéaire, cette équation sera résolue en pratique par une méthode de Newton.

Notons qu'à une méthode d'intégration donnée, il peut correspondre plusieurs méthodes pour les EDO, selon qu'on explicite ou implicite les valeurs de  $f$  aux différents nœuds (Runge vs Crank-Nicolson), et selon la façon dont on approche ces valeurs dans le cas d'une méthode explicite. En particulier, l'ordre de la méthode de calcul d'intégrale ne se retrouve dans la méthode EDO que sous certaines conditions (ex : Simpson et RK4).

### 7.2 Convergence de la méthode d'Euler explicite

Considérons la solution  $y$  d'un problème de Cauchy (18), et son approximation par la méthode d'Euler explicite pour une subdivision à pas constant  $h = \frac{T}{N}$ . On a alors, pour tout  $0 \leq n \leq N - 1$  :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s)) ds \quad (19)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n). \quad (20)$$

Notons  $e_n = y(t_n) - y_n$ ,  $0 \leq n \leq N$ .

#### Définition 7.1. Schéma convergent

On dit que le schéma (20) converge si, dès lors que  $e_0 = 0$ , on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \max_{0 \leq n \leq N(h)} |e_n| \right) = 0.$$

Rectangles à gauche	Euler explicite (ou progressive) (1768) $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$
Rectangles à droite	Euler implicite (ou rétrograde) $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$
Rectangles à point milieu	Runge (1895) $y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)\right)$
Trapèzes	Crank Nicolson (1947) $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})]$
Simpson	Runge-Kutta 4 (1901) $k_1^n = f(t_n, y_n)$ $k_2^n = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1^n\right)$ $k_3^n = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2^n\right)$ $k_4^n = f(t_{n+1}, y_n + hk_3^n)$ $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1^n + 2k_2^n + 2k_3^n + k_4^n)$

TABLE 1 – Quelques méthodes classiques pour l'approximation des EDO.

En soustrayant (20) de (19), on obtient

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s))ds - hf(y_n) \\ &= e_n + \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s))ds - hf(y(t_n))}_{\epsilon_n} + \underbrace{hf(y(t_n)) - hf(y_n)}_{\eta_n} \end{aligned}$$

On appelle  $\epsilon_n$  l'erreur de consistance locale (de l'anglais, *consistent*=cohérent, concordant) : c'est l'erreur qu'on commettrait sur le pas de temps  $[t_n, t_n + h]$  si  $y_n$  était égal à  $y(t_n)$ .

Pour que le schéma soit convergent, il faut à la fois

- contrôler l'erreur de consistance globale  $\sum_n |\epsilon_n|$  (méthode *consistante*),
- s'assurer que les différentes sources d'erreur, en se propageant, ne font pas "exploser" l'erreur finale (méthode *stable*).

### Définition 7.2. Méthode consistante

On dit que la méthode est consistante si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \sum_{k=0}^{N(h)-1} |\epsilon_k| \right) = 0.$$

### Définition 7.3. Méthode stable

On dit que la méthode est stable si, étant donnés

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad y_0 = y_0^h \quad (21)$$

$$z_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n) + \eta_n, \quad z_0 = z_0^h \quad (22)$$

alors il existe  $K > 0$  tel que

$$\max_n |y_n - z_n| \leq K \left( |y_0^h - z_0^h| + \sum_{k=0}^{N(h)-1} |\eta_k| \right).$$

Vérifions que c'est bien le cas pour la méthode d'Euler explicite. On suppose que la solution exacte est de

classe  $C^2$ . Alors

$$\begin{aligned}
 \epsilon_n &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf(y(t_n)) \\
 &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} (y'(t) - y'(t_n)) dt \\
 &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^t y''(s) ds dt \\
 &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} y''(s) ds \int_s^{t_{n+1}} dt \\
 &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} y''(s)(t_{n+1} - s) ds
 \end{aligned}$$

On pose  $M_2 = \sup_{0 \leq s \leq T} |y''(s)|$ . Alors on a

$$|\epsilon_n| \leq M_2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s) ds = M_2 \frac{h^2}{2}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\epsilon_k| \leq \frac{M_2}{2} Th.$$

Ainsi, la méthode d'Euler explicite est consistante pour toute équation différentielle dont la solution est de classe  $C^2$ .

Montrons maintenant que la méthode d'Euler est convergente. La fonction  $f$  étant localement lipschitzienne, notons  $L$  sa constante de Lipschitz sur  $[0, T] \times \bar{B}(0, R)$ , où  $R$  est choisi tel que  $y(t_n), y_n \in \bar{B}(0, R)$ ,  $n \leq N$ . On a alors pour  $0 \leq n \leq N - 1$ ,

$$\begin{aligned}
 |e_{n+1}| &\leq |e_n| + |\epsilon_n| + hL|e_n| \\
 &\leq (1 + hL)|e_n| + |\epsilon_n| \\
 &\leq (1 + hL)[(1 + hL)|e_{n-1}| + \epsilon_{n-1}] + |\epsilon_n| \\
 &\leq (1 + hL)^{n+1}|e_0| + \sum_{k \leq n} (1 + hL)^{n-k} |\epsilon_k|
 \end{aligned}$$

Supposons que  $e_0 = 0$  i.e. la donnée initiale est connue exactement. Remarquons que, pour  $0 \leq n \leq N$ ,

$$(1 + hL)^n \leq (1 + hL)^N = \left(1 + \frac{TL}{N}\right)^N \leq e^{TL}.$$

On a donc la majoration suivante :

$$\max_{0 \leq n \leq N} |e_n| \leq e^{TL} \sum_{k=0}^{N-1} |\epsilon_k| \leq e^{TL} \frac{M_2}{2} Th.$$

On dit que la méthode est d'ordre (global) 1.

Remarque : la méthode de Runge est d'ordre 2, i.e. on a une estimation du type

$$\max_{0 \leq n \leq N} |e_n| \leq Ch^2.$$

La méthode de Runge Kutta 4 est d'ordre 4. Ces ordres peuvent être vérifiés numériquement, voir figure 5.

#### Définition 7.4. Ordre d'une méthode

Une méthode à 1 pas est d'ordre (global)  $p \geq 1$  si il existe  $K$  ne dépendant que de  $y$  tel que

$$\sum_{n=0}^{N(h)-1} |\epsilon_n| \leq Kh^p.$$

#### Théorème 7.5. Convergence d'ordre $p$

Si une méthode est stable et d'ordre  $p$  et si  $f \in C^p$  alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |y(t_n) - y_n| \leq M (|y_0 - y_0^h| + Kh^p)$$

où  $K$  est comme dans la définition 7.4.

### 7.3 En pratique : limitations des méthodes explicites

#### 7.3.1 Problèmes raides

Considérons le problème ci-dessous :

$$y'(t) = \lambda y(t), t \in [0, 1], \quad y(0) = 1, \quad (23)$$

avec  $\lambda = -10^4$ . (Cela peut modéliser une cinétique chimique très rapide.) La solution exacte est donnée par

$$y_{ex}(t) = e^{\lambda t}, t \in [0, 1].$$

Elle décroît très vite vers 0. En particulier,  $y_{ex}(1) = e^\lambda$  est plus petit que la précision machine.

Approchons ce problème avec une méthode d'Euler explicite, en subdivisant notre intervalle d'étude  $[0, 1]$  en  $N = 100$  sous-intervalles réguliers. On note, comme précédemment,  $h = 1/N = 10^{-2}$  le pas de la subdivision. Alors, la solution approchée par Euler explicite est donnée par

$$y_n^e = (1 + h\lambda)^n, 0 \leq n \leq N.$$

On a en particulier  $y_N^e = (1 + h\lambda)^N = (-99)^{100}$ . Ainsi, la solution "approchée" ne correspond pas du tout à la valeur de la solution exacte.

On observe ici une forme d'*instabilité* : pour la valeur de  $h$  qu'on s'est fixée, la suite  $(y_n^e)_{n \in \mathbb{N}}$  est non bornée alors que la solution exacte reste bornée. Cela est dû au fait que  $|\lambda|$  est très grand : on dit qu'on a affaire à un problème raide. Pour que la suite  $(y_n^e)$  soit bornée, il faudrait avoir

$$|1 + h\lambda| \leq 1,$$

ce qui oblige à prendre un très petit pas,  $h < \frac{2}{-\lambda} = 2 \cdot 10^{-4}$ . En pratique, ce n'est pas toujours raisonnable car cela conduit à des temps de calcul très longs.

Pour ce type de problèmes, il est conseillé d'utiliser une méthode implicite.

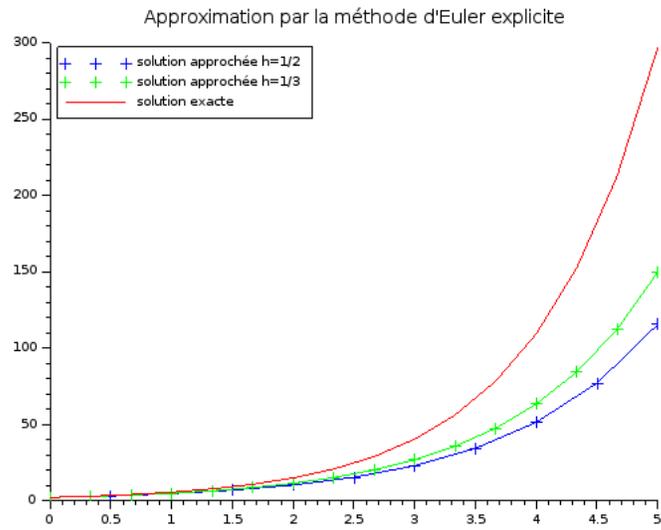


FIGURE 4 – Résolution approchée par la méthode d'Euler explicite pour l'équation  $y' = y, y(0) = 2$ .

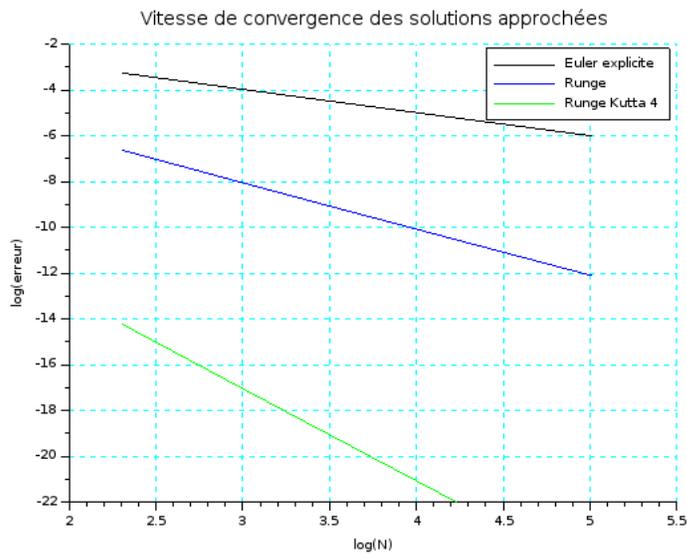


FIGURE 5 – Visualisation de l'ordre de convergence de trois méthodes numériques

Étudions ce que donne la méthode d'Euler implicite ici. La solution approchée est alors donnée par la relation

$$y_{n+1}^i = y_n^i + h\lambda y_{n+1}^i,$$

soit

$$y_n^i = (1 - h\lambda)^{-n}, 0 \leq n \leq N.$$

On voit que la suite  $(y_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dès que  $|1 - \lambda h| \geq 1$ , et en particulier pour tout  $h > 0$ . Voir tests numériques.

Plus généralement, pour un système différentiel linéaire

$$y' = Ay,$$

avec  $A$  diagonalisable de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ , la suite  $(y_n^e)_{n \in \mathbb{N}}$  des solutions approchées par méthode d'Euler explicite est stable si et seulement si  $\forall 1 \leq j \leq N, |1 + \lambda_j h| \leq 1$ . (Pour un système non linéaire  $y' = F(y)$ , c'est le spectre de  $DF(y_0)$  qui va intervenir.)

### 7.3.2 Systèmes hamiltoniens

On considère le problème suivant, dit de l'oscillateur harmonique,

$$\begin{cases} x' &= -y \\ y' &= x \end{cases} \text{ avec } x(0) = 1, y(0) = 0. \quad (24)$$

Remarquons que  $y$  vérifie l'équation du pendule linéarisé  $y'' = -y$ . La solution est donnée par

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t,$$

et la trajectoire dans le plan de phase est le cercle unité. La quantité  $H(t) = x^2(t) + y^2(t)$  est conservée, on la nomme *hamiltonien* du système (24). (Elle représente l'énergie mécanique du pendule.)

Comparons les comportements de différentes méthodes pour ce problème. Un calcul simple nous montre que l'hamiltonien n'est pas conservé par les méthodes d'Euler. Plus précisément, on a les comportements suivants.

$$\text{Euler explicite} \quad x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = (1 + h^2)(x_n^2 + y_n^2).$$

$$\text{Euler implicite} \quad x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = (1 + h^2)^{-1}(x_n^2 + y_n^2).$$

$$\text{Runge Kutta 4} \quad x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = \left(1 - \frac{h^6}{72} + \frac{h^8}{576}\right)(x_n^2 + y_n^2).$$

$$\text{Crank-Nicolson} \quad x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = x_n^2 + y_n^2.$$

On remarque que seule la méthode de Crank-Nicolson préserve l'hamiltonien, ce qui est crucial lorsque le système doit être étudié sur des temps longs.

Une alternative est d'utiliser un schéma d'Euler symplectique défini pour un système de la forme

$$y' = x, \quad x' = f(y)$$

par

$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n + hx_n \\ x_{n+1} &= x_n + hf(y_n + hx_n) \end{cases}$$

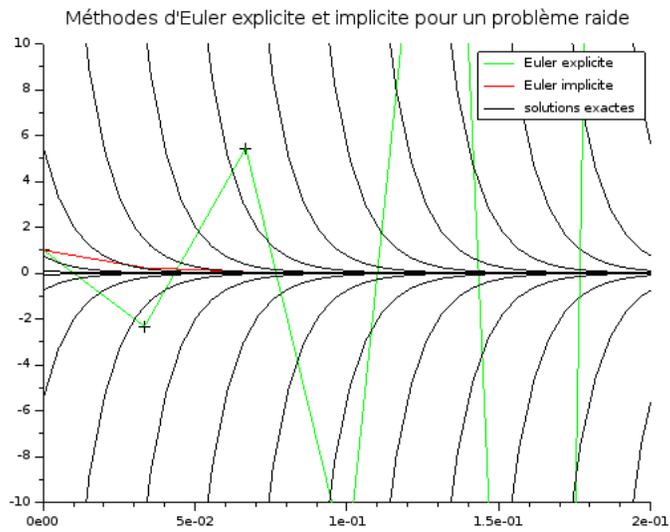


FIGURE 6 – Résolution approchée d'un problème raide  $y' = -100y$ ,  $y(0) = 1$ .

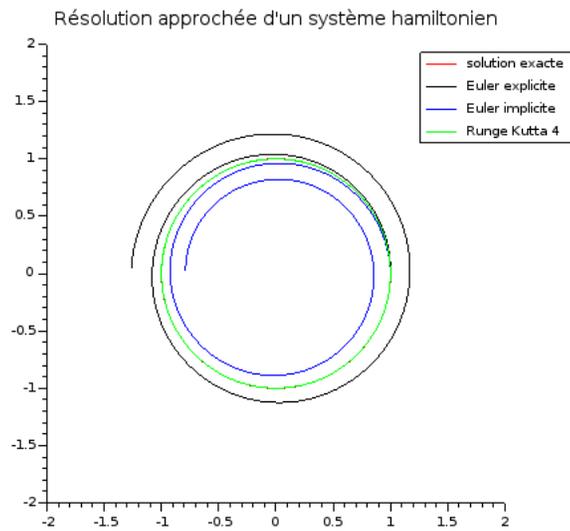


FIGURE 7 – Résolution exacte et approchée du système hamiltonien  $x' = -y$ ,  $y' = x$ ,  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 0$ .

(Il s'agit d'une variante entièrement explicite de l'algorithme de Crank-Nicolson.)

Ce schéma ne préserve pas l'hamiltonien exact  $H(x_n, y_n)$  mais il préserve un hamiltonien approché. Dans le cas de l'oscillateur harmonique, pour lequel  $f(y) = -y$ , l'hamiltonien approché est

$$H_h(x, y) = x^2 + y^2 + hxy.$$

## Références

- [1] Crouzeix, Mignot, Analyse numérique des équations différentielles, Masson, Paris 1984.
- [2] Hairer, Norsett, Wanner, Solving ordinary differential equations. I. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [3] Hubbard, West, Differential equations : a dynamical system approach, Springer 1995.
- [4] L. Perko, Differential equations and dynamical systems, Springer, 2001.
- [5] Hirsch, Smale, Devaney, Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos, Academic Press, 2004.
- [6] Laudenbach, calcul différentiel et intégral, Ecole polytechnique, 1995.
- [7] L. Rouvière, Petit guide de calcul différentiel pour la licence et l'agrégation
- [8] Zuily, Queffelec, Éléments d'analyse : agrégation de mathématiques, Dunod 2002.